

## Signaux et Systèmes

### Chapitre 3

# Représentation des signaux par séries de Fourier

*Octobre 2024*

## TABLE DES MATIERES

---

### 3.1 Signaux et vecteurs

### 3.2 Comparaison de signaux

- Corrélation
- Détection de signaux

### 3.3 Approximation de signaux

- Famille orthonormale de fonctions
- Approximation aux moindres carrés

### 3.4 Séries de Fourier trigonométriques

### 3.5 Séries de Fourier complexes

### 3.6 Bases orthogonales: compléments

## 3.1 VECTEURS ET SIGNAUX

- Composantes d'un vecteur
- Composantes d'un signal
- Produit scalaire

### Composantes d'un vecteur

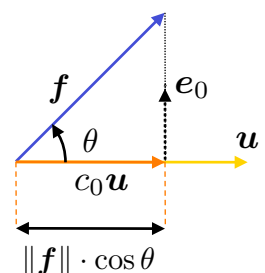
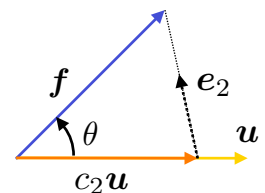
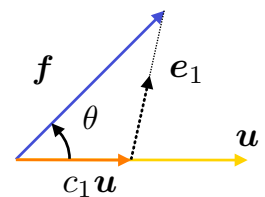
- Géométrie vectorielle: notions de base

- Vecteur:  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$
- Produit scalaire:  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$
- Norme:  $\|\mathbf{f}\| = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2}$
- Angle entre deux vecteurs:  $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{u}\|}$

- Meilleure approximation de  $\mathbf{f}$  par  $\mathbf{u}$

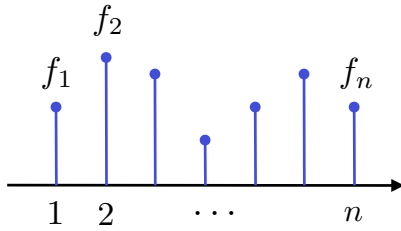
- Approximation linéaire:  $\mathbf{f} \approx c\mathbf{u}$
- Calcul de l'erreur:  $\|e\|^2 = \|\mathbf{f} - c\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 + c^2\|\mathbf{u}\|^2 - 2c\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle$
- Minimisation: **projection orthogonale!**

$$e_0 \perp \mathbf{u} \Leftrightarrow \langle \mathbf{f} - c_0 \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$



# Norme et énergie d'un signal

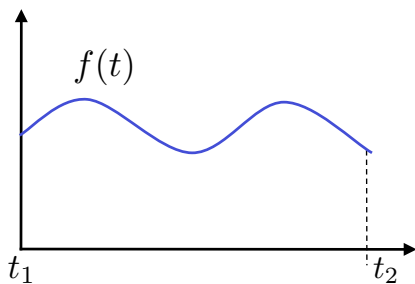
## ■ Vecteur comme un signal



$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$$

Norme au carré:  $\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=1}^n |f_i|^2$  (= énergie)

## ■ Signal comme un vecteur



Energie du signal:  $\|f\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$

Espace vectoriel de signaux:

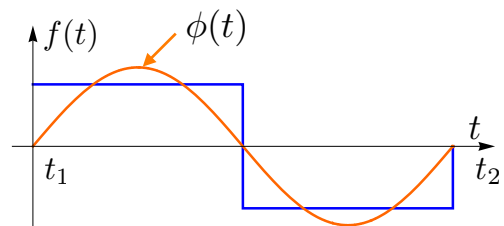
$$L_2([t_1, t_2]) = \left\{ f(t) : t \in [t_1, t_2] \wedge \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

# Composantes d'un signal

## ■ Signal comme un point dans un espace vectoriel (espace de Hilbert)

■ Signal:  $f \in L_2([t_1, t_2])$

■ Energie du signal:  $\|f\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$



## ■ Meilleure approximation de $f(t)$ par $\phi(t)$

■ Approximation linéaire:  $f(t) \simeq c\phi(t)$

■ Erreur quadratique:

$$\|e\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - c\phi(t))^2 dt = \|f\|_{L_2}^2 + c^2 \|\phi\|_{L_2}^2 - 2c \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi(t) dt$$

■ Minimisation:  $\frac{\partial \|e\|_{L_2}^2}{\partial c} = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi(t) dt}{\|\phi(t)\|_{L_2}^2} = \frac{\langle f, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle} ?$

# Produit scalaire

## ■ Concepts mathématiques sous-jacents

- Espace vectoriel des signaux:  $\forall f, g \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}$
- Mesure de norme ou d'énergie:  $\|f\|^2$
- Forme bilinéaire:  $\forall c \in \mathbb{R}, \langle f, c\phi \rangle = c\langle f, \phi \rangle$  t.q.  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$

## ■ Produit scalaire (réel)

Soit un espace vectoriel  $\mathcal{H}$  réel. On définit un produit scalaire associant à tout couple  $f, g \in \mathcal{H}$  un réel noté  $\langle f, g \rangle$  qui a les propriétés suivantes  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g, h \in \mathcal{H}$ :

1. **Linéarité:**  $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$  et  $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
2. **Symétrie:**  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
3. **Positivité:**  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle > 0, \forall f \neq 0$

## ■ Exemples

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$  :  $\langle f, g \rangle = f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_ng_n$
- $\mathcal{H} = L_2([0, T])$  :  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$

# Produit scalaire (suite)

## ■ Produit scalaire hermitien

Soit un espace vectoriel  $\mathcal{H}$  complexe. On définit un produit scalaire associant à tout couple  $f, g \in \mathcal{H}$  un complexe noté  $\langle f, g \rangle$  qui a les propriétés suivantes  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in \mathcal{H}$ :

1. **Linéarité:**  $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$  et  $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
2. **Symétrie hermitienne:**  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$
3. **Positivité:**  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle > 0, \forall f \neq 0$

Généralisation du cas réel (symétrie  $\rightarrow$  symétrie hermitienne)

Implication: 1 + 2  $\Rightarrow \langle f, \alpha g \rangle = \alpha^* \langle f, g \rangle$

## ■ Exemples

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  :  $\langle f, g \rangle = f_1g_1^* + f_2g_2^* + \dots + f_ng_n^*$
- $\mathcal{H} = L_2([0, T])$  complexe:  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g^*(t) dt$

## 3.2 COMPARAISON DE SIGNAUX

---

- Corrélation et similarité
- Corrélation normalisée
- Fonction d'intercorrélacion: définition
- Intercorrélacion et convolution
- Application à la détection

### Corrélation et similarité

---

- Comparaison de signaux par mesure de distance

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left( \int_{t_1}^{t_2} (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

$$d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g \quad \text{p.p.}$$

- Mesure de similarité et corrélation

Hypothèse: il existe un produit scalaire associé t.q.  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f, g \rangle$$

Donc si  $\|f\|^2 = \text{cste}$  et  $\|g\|^2 = \text{cste}$ , alors

$$\|f - g\| \text{ minimum} \Leftrightarrow \langle f, g \rangle \text{ maximum}$$

- Fonction d'intercorrélacion

Degré de similarité entre deux signaux en fonction de leur décalage relatif

# Corrélation normalisée

**But:** Définir une mesure de similarité qui ne dépend pas de l'amplitude des signaux

## ■ Corrélation normalisée (ou coefficient de corrélation)

$$\rho(f, g) = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$$

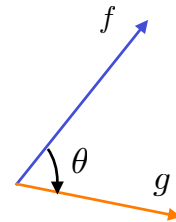
Valable pour tout produit scalaire

## ■ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Quel que soit le produit scalaire, on a l'inégalité suivante

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

avec égalité si et seulement si  $f = \alpha \cdot g$  avec  $\alpha$  scalaire.



$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$$

## ■ Implications pour la corrélation normalisée

- $-1 \leq \rho(f, g) \leq 1$
- $\rho(f, g) = 1 \Leftrightarrow f = \alpha \cdot g$  p.p.
- $\rho(f, g)$  peut être assimilé au  $\cos \theta$  entre deux vecteurs ou signaux

# Fonction d'intercorrélation: définition

## ■ Produit scalaire pour signaux complexes à énergie finie

$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$

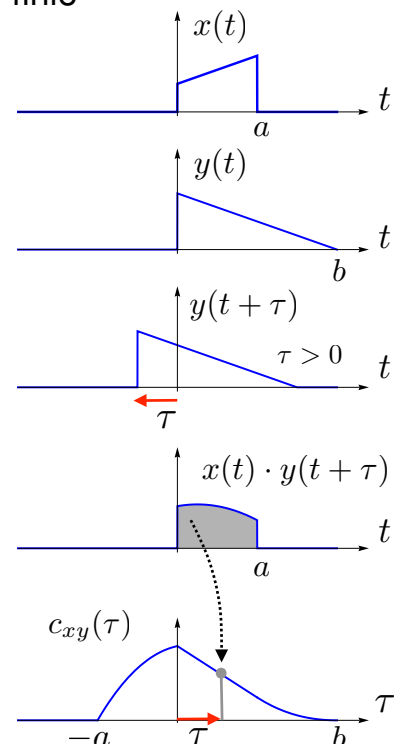
$x(t), y(t)$  signaux complexes ou réels

$$c_{xy}(\tau) = \langle x(\cdot), y(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t + \tau) dt$$

$$c_{yx}(\tau) = \langle y(\cdot), x(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x^*(t + \tau) dt$$

$c_{xy}(\tau)$ : intercorrélacion entre  $x(t)$  et  $y(t + \tau)$

$c_{yx}(\tau)$ : intercorrélacion entre  $y(t)$  et  $x(t + \tau)$



# Corrélation et convolution

## Intercorrélation

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t + \tau) dt$$

## Convolution

$$(g * h)(\tau) = (h * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - u)h(u) du$$

$$c_{xy}(\tau) = \langle x, y(\cdot + \tau) \rangle \stackrel{t + \tau = u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u - \tau) y^*(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\vee(\tau - u) y^*(u) du$$

Opérateur de renversement:  $x^\vee(\tau) = x(-\tau)$

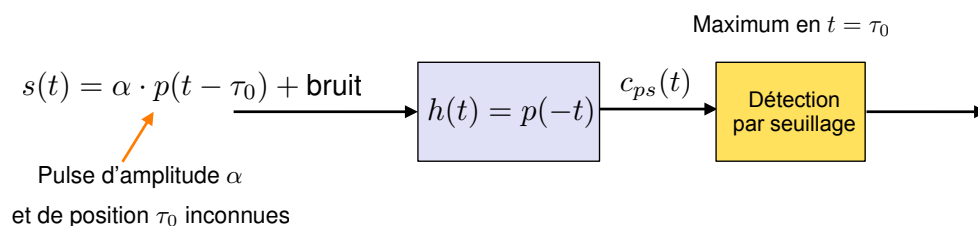
Donc:  $c_{xy}(\tau) = (x^\vee * y^*)(\tau)$

Suit:  $c_{yx}(\tau) = (y^\vee * x^*)(\tau) = (x^* * y^\vee)(\tau) = (x^{*\vee} * y)(-\tau) = c_{xy}^*(-\tau)$

$$c_{yx}(\tau) = c_{xy}^*(-\tau)$$

Si  $x(t), y(t)$  réels:  $c_{yx}(\tau) = c_{xy}(-\tau)$

## Application: détection de signaux



- Structure du détecteur
  - Corrélateur** = filtre analogique (ou digital)
- Détecteur optimal en présence de bruit blanc
  - Filtre adapté**
- Applications:
  - Radar
  - Sonar, Ultrasons
  - Communications

Demo sonar

## 3.3 APPROXIMATION DE SIGNAUX

---

- Changement de base dans le plan
- Espaces de Hilbert
- Système orthonormal de fonctions
- Approximation aux moindres carrés

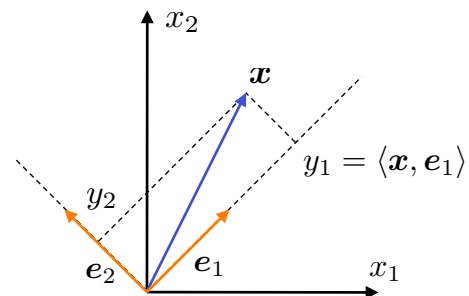
### Changement de base dans le plan

Soit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  un point (vecteur) dans le plan  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\{e_1, e_2\}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^2$  t.q.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i-j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Comment représente-t-on  $\mathbf{x}$  dans la base  $\{e_1, e_2\}$ ?



- Changement de base:  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$

$$\mathbf{x} = y_1 e_1 + y_2 e_2 \quad \text{avec} \quad y_i = \langle \mathbf{x}, e_i \rangle$$

$$\text{ou, sous forme plus concise, } \mathbf{x} = \sum_i \langle \mathbf{x}, e_i \rangle e_i$$



# Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un espace vectoriel complet, typiquement de dimension infinie, muni d'un produit scalaire  $\langle x, y \rangle$ .

## ■ Exemples

- Le plan  $\mathbb{R}^2$  avec  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$
- $L_2([0, T])$ : l'espace des signaux à durée et énergie finies avec  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt$
- $L_2(\mathbb{R})$ : l'espace des signaux à énergie finie avec  $\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$

Le produit scalaire spécifie

- 1) la notion d'orthogonalité:  $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$
- 2) la notion de similarité par l'intermédiaire de la norme  
 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} : \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

## Famille orthonormale de fonctions

### ■ Espace de Hilbert: $L_2([0, T])$

Produit scalaire associé:  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt$

### ■ Définition

La famille de fonctions  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$  est orthonormale si et seulement si

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \delta_{m-n} \quad (\text{Delta de Kronecker})$$

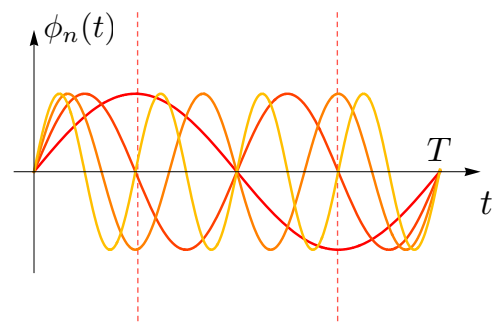
### ■ Exemple

Les fonctions sinusoïdales:  $\phi_n(t) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$

En effet,

$$\langle \phi_m(t), \phi_n(t) \rangle = 0, \quad m \neq n \quad (\text{argument de symétrie})$$

$$\|\phi_n\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\phi_n(t)|^2 dt = 2 \int_0^1 \sin^2(2\pi n \tau) d\tau = 1$$



# Approximation aux moindres carrés

Soit  $\phi_1, \dots, \phi_N$  une famille orthonormale de fonctions dans  $\mathcal{H}$

## ■ Questions

- Comment approche-t-on un élément  $x \in \mathcal{H}$  à l'aide des  $\phi_n$ ?
- Quelle est l'erreur d'approximation?

## ■ Théorème d'approximation orthogonale

La meilleure approximation de  $x \in \mathcal{H}$  par une combinaison linéaire de fonctions orthonormales  $\phi_1, \dots, \phi_N \in \mathcal{H}$  est

$$x_N = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \quad \text{avec} \quad c_n = \langle x, \phi_n \rangle$$

L'erreur (minimale) correspondante est

$$\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \|x_N\|^2 \quad \text{avec} \quad \|x_N\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$$

## Preuve du théorème d'approximation orthogonale

Système orthonormal et énergie d'un signal:  $y = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \Rightarrow \|y\|^2 = \sum_{n=1}^N |a_n|^2$

$$\text{En effet: } \|y\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^N a_n \phi_n, \sum_{m=1}^N a_m \phi_m \right\rangle \stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N a_m^* \langle \phi_n, \phi_m \rangle \stackrel{\text{orthonormalité}}{=} \sum_{n=1}^N |a_n|^2$$

Soit  $y = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n$  et  $c_n = \langle x, \phi_n \rangle$  alors

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^N a_n^* \langle x, \phi_n \rangle = \sum_{n=1}^N a_n^* c_n = \langle y, x \rangle^*$$

Ce qui implique  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N a_n^* c_n - \sum_{n=1}^N a_n c_n^* + \sum_{n=1}^N |a_n|^2$  **Demo JPEG**

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |a_n - c_n|^2 \quad \text{minimum pour } a_n = c_n$$

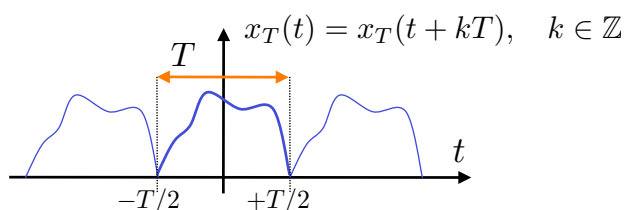
En effet:  $|a_n - c_n|^2 = (a_n - c_n)(a_n^* - c_n^*) = |a_n|^2 + |c_n|^2 - a_n^* c_n - a_n c_n^*$

## 3.4 SERIES DE FOURIER TRIGONOMETRIQUES

- Séries de Fourier trigonométriques
- Spectre d'un signal périodique
- Interprétation Hilbertienne
- Orthogonalité des co-sinusoïdes
- Séries de Fourier généralisées

### Séries de Fourier trigonométriques

- Signal réel périodique de période  $T$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pulsation  
fondamentale



- Décomposition en série de Fourier

$$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2a_n \cos(n\omega_0 t) + 2b_n \sin(n\omega_0 t))$$

- Calcul des coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Condition d'existence

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)| dt < +\infty$$

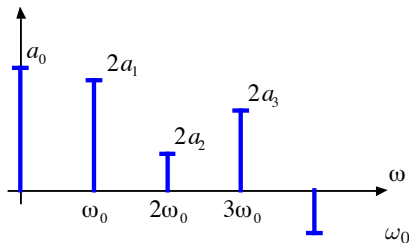
# Spectre d'un signal périodique

## ■ Notion de spectre discret

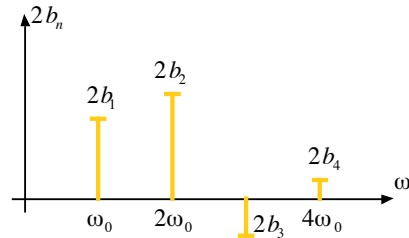
Un signal périodique est décrit de façon unique par ses coefficients de Fourier  $a_0, 2a_n, 2b_n$

⇒  $x(t)$  possède un «spectre de lignes», un «spectre discret»

## ■ Représentation graphique des lignes spectrales



composantes paires



composantes impaires

## ■ Décomposition en partie paire et impaire

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \underbrace{\cos(n\omega_0 t)}_{\text{f.p.}}; \quad x_i(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n \underbrace{\sin(n\omega_0 t)}_{\text{f.i.}}$$

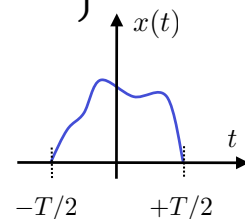
# Interprétation Hilbertienne

## ■ Espace de Hilbert des signaux à durée et énergie finies

$$L_2 \left( \left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \right) = \left\{ x(t) : x(t) = 0, |t| > \frac{T}{2} \text{ et } \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

## ■ Produit scalaire associé

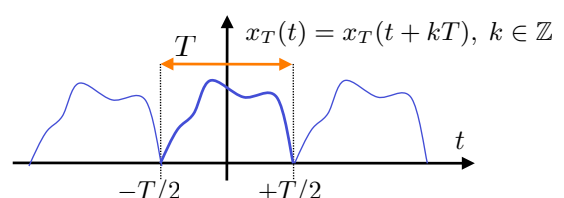
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t) dt$$



**Théorème:**  $\{1, \sqrt{2} \cos(n\omega_0 t), \sqrt{2} \sin(n\omega_0 t)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  est une base orthonormale pour  $L_2 \left( \left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \right)$

⇒ Tout signal  $x(t) \in \mathcal{H}$  admet une décomposition unique en somme de fonctions (co-)sinusoïdales

## ■ Extension naturelle aux signaux périodiques



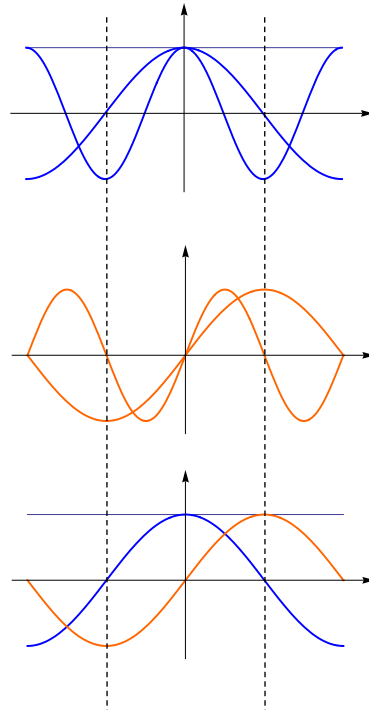
# Orthogonalité des (co-)sinusoïdes

## ■ Relations fondamentales d'orthogonalité

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{m2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \delta_{m-n}$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{m2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = \delta_{m-n}$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{m2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt = 0$$



# Séries de Fourier généralisées

Soit  $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un ensemble de fonctions orthonormales formant une base de  $\mathcal{H} = L_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$

## ■ Orthonormalité

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \delta_{m-n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

## ■ Séries de Fourier généralisées

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_n(t) \quad \text{avec} \quad a_n = \langle x, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \phi_n(t) dt$$

## ■ Vérification

$$\text{Soit } x(t) = \sum_n a_n \phi_n(t)$$

$$a_m = \langle x, \phi_m \rangle = \left\langle \sum_n a_n \phi_n, \phi_m \right\rangle \stackrel{\text{linéarité du produit scalaire}}{=} \sum_n a_n \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m \rangle}_{\delta_{n-m}} = a_m$$

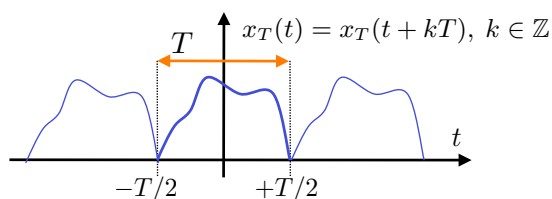
Encore faut-il s'assurer que la famille  $\{\phi_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est complète...

## 3.5 SERIES DE FOURIER COMPLEXES

- Séries de Fourier (cas complexe)
- Simplification du calcul réel
- Amplitude et phase
- Interprétation du spectre de Fourier
- Espace de Hilbert complexe

### Série de Fourier (cas complexe)

- Signal complexe périodique de période  $T$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pulsation fondamentale

- Décomposition en série de Fourier complexe

$$x_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Calcul des coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \langle x_T, e^{jn\omega_0 \cdot} \rangle$$

Condition d'existence (suffisante):

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)| dt < +\infty \Rightarrow |c_n| < +\infty$$

# Simplification du calcul réel

- Coefficient de Fourier d'un signal réel  $x_T(t) = x_T^*(t)$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{jn\omega_0 t} dt = c_n^*$$

- Lien avec la série de Fourier réelle

$$c_0 = a_0 \text{ (valeur moyenne)}$$

$$c_n = c_{-n}^* = a_n - jb_n$$

$$\begin{aligned} \text{En effet: } c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt}_{a_n = \frac{1}{2}(c_n + c_{-n})} - j \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt}_{b_n = \frac{1}{2j}(-c_n + c_{-n})} \end{aligned}$$

Relations d'Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Avantages de la représentation complexe

- Simplification de l'écriture et des calculs (merci, Euler!)
- Mise en évidence des symétries par l'introduction des fréquences négatives

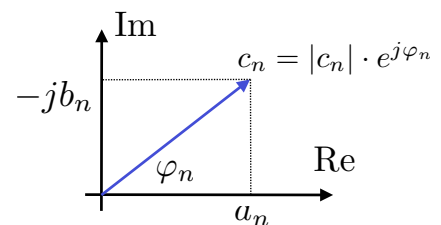
# Amplitude et phase

- Représentation polaire des coefficients de Fourier

$$c_n = a_n - jb_n = |c_n| \cdot e^{j\varphi_n}$$

$$\text{Amplitude de } c_n: \quad |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\text{Phase de } c_n: \quad \varphi_n = \arg(c_n) = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



- Formule de reconstruction dans le cas réel

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{c_{-n}^*}^{c_n} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= c_0 + 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right) = c_0 + 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} \right) \\ &= c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

# Séries de Fourier: exemple

## ■ Signal rectangulaire

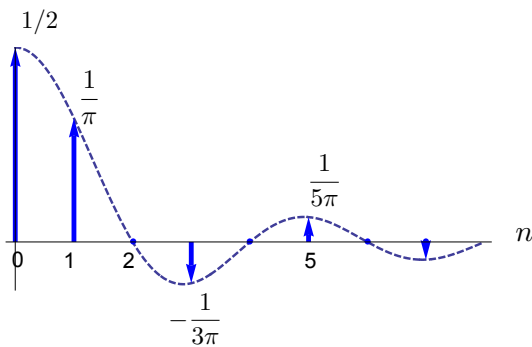
$$x_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-T/4, T/4) \\ 0, & t \in [-T/2, -T/4) \cup [T/4, T/2) \end{cases}$$

## ■ Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} e^{-j2\pi nt/T} dt = \frac{e^{-j2\pi nt/T} \Big|_{-T/4}^{+T/4}}{-j2\pi n} = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

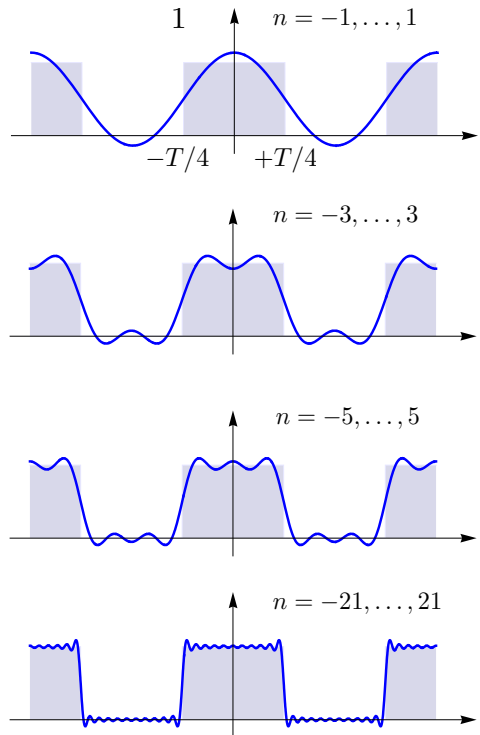
## ■ Spectre de Fourier

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j\varphi_n} \quad \varphi_n = \begin{cases} \pi, & n = 3, 7, 11, \dots \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



Unser / Signaux et systèmes

## ■ Séries de Fourier tronquées



3-31

# Interprétation du spectre de Fourier

## ■ Amplitude

- Plus un signal est à variation lente, plus son spectre décroît de façon rapide.
- Concept de largeur de bande: domaine spectral sur lequel les amplitudes spectrales  $|c_n|$  ne sont pas négligeables. Typiquement, un signal à variation rapide a une largeur de bande supérieure à celle d'un signal à variation lente.
- Degré de différentiabilité. La présence d'une discontinuité se traduit par une décroissance lente du spectre; e.g.,  $1/n$ . On démontre que si les  $k$  premières dérivées d'un signal sont bornées, alors son spectre décroît au moins comme  $1/n^k$ .

## ■ Phase

- La phase a un rôle crucial pour reproduire la forme d'un signal. Pour générer un saut brusque, il est primordial que les fronts (zéros) des sinusoides soient bien en phase.

## ■ Symétrie

- Signal réel:  $c_{-n} = c_n^*$
- Signal réel pair:  $c_n = \text{Re}(c_n) = a_n \Rightarrow$  spectre réel
- Signal réel impair:  $c_n = j \text{Im}(c_n) = -j b_n \Rightarrow$  spectre purement imaginaire

Unser / Signaux et systèmes

3-32



# Espace de Hilbert complexe

- Espace des signaux complexes à durée et énergie finies

$$\mathcal{H}_T = \left\{ x(t) : x(t) \in \mathbb{C}, \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty \text{ et } x(t) = 0 \text{ pour } |t| > \frac{T}{2} \right\}$$

$$\text{Produit scalaire associé: } \langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t) dt$$

**Théorème:**  $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H}_T$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{H}_T, \quad x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle x, e^{jn\omega_0 \cdot} \rangle}_{c_n} e^{jn\omega_0 t}$$

Orthogonalité des exponentielles complexes

$$\langle e^{jm\omega_0 \cdot}, e^{jn\omega_0 \cdot} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \delta_{m-n}$$

Justification:  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi(m-n)t} dt = 0$  pour  $m \neq n$  (compensation des valeurs positives et négatives)

## 3.6 BASES ORTHOGONALES: COMPLEMENTS

---

- Bases orthonormales
- Systèmes complets: de Bessel à Parseval
- Parseval et séries de Fourier
- Phénomène de Gibbs

# Bases orthonormales

## ■ Structure mathématique requise

Espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni d'un produit scalaire  $\langle x, y \rangle$  qui spécifie les notions de norme et d'orthogonalité

## ■ Bases orthonormales: propriétés fondamentales

1) les fonctions  $\phi_n \in \mathcal{H}$  doivent être orthonormales; c.à d.  $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{m-n}$

2) le système  $\{\phi_n\}$  doit être complet; c. à d.

“tout élément de  $\mathcal{H}$  peut se représenter de façon exacte”

“il n'existe aucun élément non nul de  $\mathcal{H}$  orthogonal à tous les  $\phi_n$ ”

⇒ le point délicat en dimension infinie!

## ■ Développement dans une base orthonormale

$$\forall x \in \mathcal{H}, x = \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{H}, \left\| x - \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = 0$$

# Systèmes complets: de Bessel à Parseval

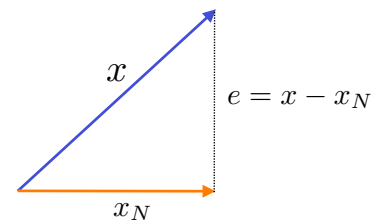
## ■ Inégalité de Bessel

Soit  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un système de fonctions orthonormales dans  $\mathcal{H}$ .

$$\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \leq \|x\|^2$$

Preuve: Application du théorème d'approximation orthogonale

$$\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \|x_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^N |c_n|^2 \leq \|x\|^2$$



$$\|x\|^2 = \|x_N\|^2 + \|e\|^2$$

## ■ Définition

Le système orthonormal  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est **complet** si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{H}, \lim_{N \rightarrow +\infty} \|x - x_N\|^2 = \left\| x - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \right\|^2 = 0$$

## ■ Théorème de Parseval

$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthonormal complet—et donc une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ —

si et seulement si  $\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 = \|x\|^2$

# Parseval et séries de Fourier

Coefficients de Fourier complexes:  $c_n = \langle x, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

## Relation de Parseval

$$\|x\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Série tronquée:  $x_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t}$

Erreur d'approximation:  $\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

## ■ Convergence des séries de Fourier

C'est une question qui a longtemps laissé les mathématiciens perplexes et qui n'a été résolue, de façon satisfaisante, qu'au début du 20ème siècle (théorie de Lebesgue).

La convergence *uniforme* nécessite, en particulier, que  $x(t)$  soit continue.

Autrement, on a seulement une convergence au sens de la norme  $L_2$  (cf. Gibbs).

De plus, si  $x \in L_2 \left( \left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \right)$ , la convergence ponctuelle (i.e.,  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t_0) = x(t_0)$ ) est assurée *presque partout* (Carleson, 1966; Prix Abel 2006).

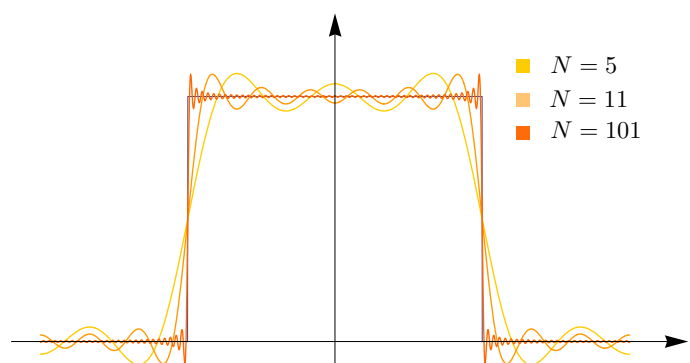
# Phénomène de Gibbs

Décomposition en série de Fourier d'une onde rectangulaire de période  $T = 1$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} \leq t < -\frac{1}{4} \\ 1, & -\frac{1}{4} < t < +\frac{1}{4} \\ 0, & +\frac{1}{4} < t < +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{j2\pi n t}$$

$$c_n = \int_{-1/4}^{+1/4} e^{-j2\pi n t} dt = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$



## ■ Commentaires

Deux ensembles de conditions suffisantes pour la convergence uniforme des séries de Fourier sont:

- $x(t)$  continue et  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$
- $x(t)$  ainsi que sa dérivée sont à énergie finie;

Aucun n'est satisfait ici!